آموزشی

دکتر محرم نژاد ایردموسی
عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

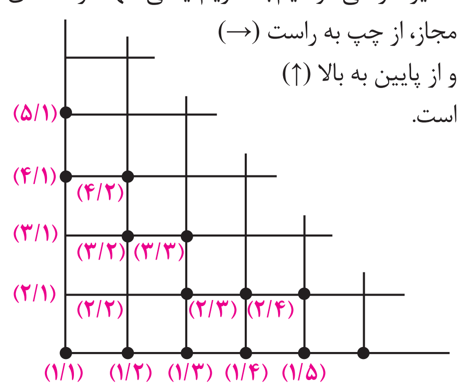
دو نگاه متفاوت به دوجمله‌ای خیام ـ پاسکال

مقدمه

شـایـد برای شـما هم اتفاق افتاده باشـد که در حل یک مسـئله به راه‌حل‌های متفاوتی برخورده باشـید و این راه‌حل‌های متفاوت به بخش‌های مختلفی از ریاضیات تعلق داشـته باشـند. آیا به پیدا کردن و آموختن یک راه‌حل اکتفا می‌کنید، یا اینکه سـعی می‌کنید روش‌های مختلف را بیاموزید؟ مطمئناً یادگیری چند روش حل شـما را قادر می‌سـازد که در مسـائل مشـابه دست بازتری برای حل مسئله داشته باشید. اتحاد دوجمله‌ای خیام ـ پاسکال یکی از همین مسئله‌هاست. در این مقاله قصد داریم با دو نگاه «جبری» و «ترکیبیاتی» به سراغ این اتحاد مفید برویم.

با ارائه چند مسئله به طرح موضوع می‌پردازیم:

◆ **مسـئلهٔ ۱.** در شهر صدتقاطع، خیابان‌ها یا شمالی ـ جنوبی هسـتند و یا شـرقی ـ غربی و چون این شهر ۱۰ خیابان عمودی و ۱۰ خیابان افقی دارد، به «شهر صدتقاطع» مشـهور شده است. شـهرداری این شهر خیابان افقی iام، خیابان عمودی jام و تقاطع این دو خیابان را به‌ترتیب با اسامی رود iام، سرو jام و تقاطع (i,j) نام‌گذاری کرده اسـت. شـاید برای هر شهروند این شـهر مهم باشـد که بداند چند مسـیر متفاوت برای رفتـن از منزل به محل کارش وجود دارد. برای مثـال، از تقاطع (۱,۱) به تقاطع (۲,۳)، ۳ مسـیر به طـول ۳ وجود دارد (بشـمارید) و از تقاطع (۱,۱) به تقاطع (۳,۳)، ۶ مسـیر به طـول ۴ وجود دارد. چند مسـیر متفاوت از تقاطع (۱,۱) به تقاطع (i+۱,j+۱) وجود دارد؟ دقت کنید که در این شمارش، کوتاه‌ترین مسیرها را می‌خواهیم بشماریم. یعنی تنها حرکت‌های مجاز، از چپ به راست (→) و از پایین به بالا (↑) است.



◆ **مسئلهٔ ۲.** **علی** می‌خواهد حاصل عبارت $(x+y)^n$ را برای عدد طبیعی n محاسبه کند. او به‌جای n مقادیر ۱،۲،۳،... را جایگزین می‌کند تا بتواند دربارهٔ $(x+y)^n$ حدس بزند. برای n=۱ می‌نویسد: $(x+y)^1=x^1+y^1$ و برای n=۲ می‌نویسد:

$$(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x(x+y)+y(x+y)$$
$$=x^2+xy+yx+y^2=x^2+2xy+y^2.$$

برای n=۳ می‌نویسد:

$$(x+y)^3=(x+y)(x+y)^2=x(x+y)^2+y(x+y)^2$$

و از نتیجهٔ قبل استفاده می‌کند:

$$=x^3+2x^2y+xy^2+yx^2+2xy^2+y^3$$
$$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.$$

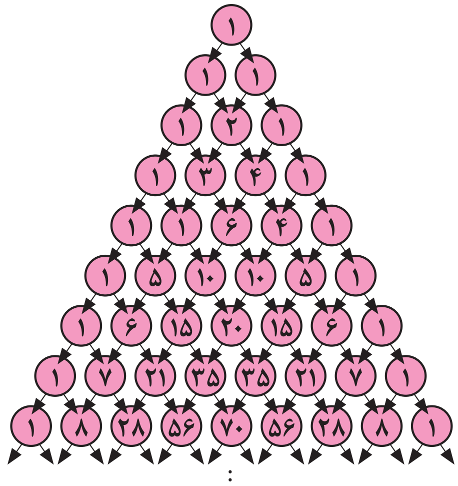
● **تمرین ۱.** حاصل $(x+y)^4$ را از روی $(x+y)^3$ و حاصل $(x+y)^5$ را از روی $(x+y)^4$ به‌دست آورید.

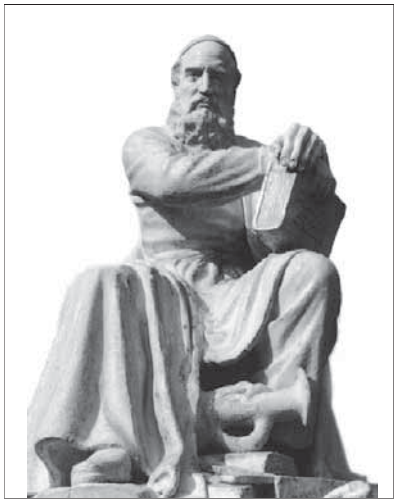
علی به حدس‌های زیر در انتهای این محاسبات می‌رسد:

حدس اول: تعداد جملات $(x+y)^n$ برابر است با n+۱.

حدس دوم: ضرایب جملات x^iy^{n-i} و $x^{n-i}y^i$ یکسان هستند. به‌عنوان مثال، در حاصل عبارت $(x+y)^5$، ضریب جملات x^4y و xy^4 برابر ۵ است.

حدس سـوم: جملات $(x+y)^{n+1}$ را می‌توان از روی جملات $(x+y)^n$ با یک محاسـبهٔ ساده به‌دست آورد. اما سؤال اصلی برای علی این است که ضریب جمله x^iy^j در حاصل عبارت $(x+y)^n$ چه‌قدر است؟ (i+j=n).





◆ **مسئلهٔ ۳.** با استفاده از ارقام صفر و یک می‌توان ۲^n کُد nرقمــی تولید کرد (چرا؟). برای مثال چهار کد دو رقمی وجــود دارد که عبارت‌اند از ۰۰، ۰۱، ۱۰ و ۱۱. **پارسا** به دنبال کدهایی است که تعداد رقم‌های یک در آن‌ها برابر i و در نتیجه تعداد رقم‌های صفر در آن‌ها برابر $j=n-i$ است. برای مثال، ۶ کد چهار رقمی داریم که دقیقــاً ۲ رقم یک دارنــد: ۰۰۱۱، ۱۰۰۱، ۰۱۰۱، ۰۱۱۰، ۱۰۱۰ و ۱۱۰۰. چنــد کــد nرقمی وجود دارد که هر کدام شامل دقیقاً i رقم یک باشند؟

● **سؤال ۱. آیا ارتباطی بین این سه مسئله وجود دارد؟**

پارسا به دنبال حل مسئلهٔ ۳، به این نکته پی برد که در یک کد nرقمی کافی اســت که جای رقم‌های یک را انتخاب کند. با این‌کار به‌طور یکتایی جای ارقام صفر نیز مشخص می‌شود. بنابراین، پارسا نتیجه گرفت که تعداد کدهای nرقمی شــامل i رقم یک برابر است با انتخاب i مکان از n مکان که برابر است با: $\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-۱)!}$.

● **سؤال ۲. آیا پارسا می‌توانست به‌جای انتخاب مکان رقم‌های یک، به ســراغ رقم‌های صفر بــرود و ابتدا مکان رقم‌های صفر را مشــخص کند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

علی با دیدن راه‌حل مسئلهٔ ۳، راه‌حلی برای مسئلهٔ ۲ پیدا کرد و به همان جواب $\binom{n}{i}$ رسید.

● **سؤال ۳. علی برای حل مســئله ۲ به کمک راه‌حل مسئله ۳، چه راهی را رفته است؟**

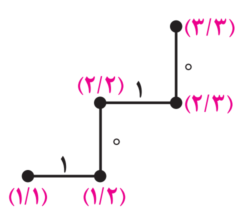
امــا علی بــا توجه به حدس‌های خــود نتایج جالب دیگری هم پیدا کرد. او با توجه به حدس ســوم خود به این تساوی رسید:

$$\binom{n}{i}=\binom{n-۱}{i}+\binom{n-۱}{i-۱}\qquad(۱)$$

این رابطه، به اتحاد خیام ـ پاســکال معروف اســت، چرا که این دو ریاضی‌دان معروف، اولین کسانی بودند که به‌درستی این رابطه پی بردند.

● **ســؤال ۴. اثبــات رابطــهٔ فــوق بــه کمک تســاوی $(x+y)^n=(x+y)(x+y)^{n-۱}$ انجام می‌شود. راه‌حل علی را پیدا کنید.**

حال فرض کنید شما ساکن شهر صدتقاطع هستید و از راه‌حل‌هــای علی و پارســا اطلاع داریــد. با توجه به شباهت‌های این سه مسئله، شاید بتوانید تعداد مسیرهای موردنظر بین دو تقاطع (۱،۱) و (i+۱،j+۱) را پیدا کنید. اگر هــر حرکت افقی را با رقم یک و هر حرکت عمودی را بــا رقم صفر نمایش دهید، آن‌گاه هر مســیر از (۱،۱) به (i+۱،j+۱)، یک کد به طول i+j را مشــخص می‌کند که شــامل i رقم یک و j رقم صفر است. برای مثال، کد ۱۰۱۰ مسیر زیر را از تقاطع (۱،۱) به تقاطع (۳،۳) نشان می‌دهد.



بنابراین، تعداد مسیرهای موردنظر برابر است با: $\binom{n}{i}$.
با توجه به راه‌حل‌های سه مسئله فوق برابری زیر به‌دست می‌آید:

$$(x+y)^n=\binom{n}{n}x^n+\binom{n}{n-۱}x^{n-۱}y+\dots \quad (۲)$$
$$+\binom{n}{۱}xy^{n-۱}+\binom{n}{۰}y^n$$

این اتحاد (که به ازای هر دو عدد حقیقی x و y برقرار است)، اتحاد دوجمله‌ای خیام ـ پاسکال نامیده می‌شود. پارسا با توجه به تعداد کدهای به طول n که شامل i رقم یک هستند، به نتیجهٔ زیر رسیده است که خود یک اتحاد ترکیبیاتی است:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\dots+\binom{n}{n}=۲^n \quad (۳)$$

● **سؤال ۵. استدلال پارسا برای این تساوی چیست؟**
اما علی برای اثبات تساوی فوق راه‌حل دیگری دارد و به این موضوع اشاره می‌کند که در اتحاد دو جمله‌ای خیام ـ پاسکال می‌توان به‌جای x و y اعداد دلخواهی قرار داد.

● **سؤال ۶. علی به‌جای x و y در اتحاد (۲) چه اعدادی قرار داده است تا بتواند اتحاد (۳) را نتیجه بگیرد؟**
علی با توجه به روش جبری خود و با تغییر مقدارهای x و y توانسته است اتحاد زیر را هم به‌دست آورد:

$$\binom{n}{۰}-\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}-\dots\pm\binom{n}{n}=۰ \quad (۴)$$

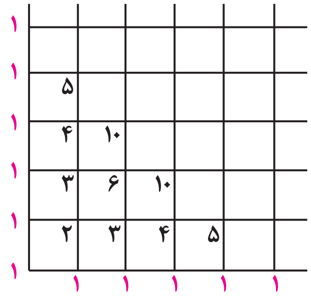
(ضریب جملهٔ آخر در سمت چپ یا مثبت است یا منفی که بستگی به n دارد.)

● **سؤال ۷. مقادیر طلایی x و y برای اثبات اتحاد (۴) از روی (۲) چه هستند؟**

● **سؤال ۸. از اتحادهای (۳) و (۴) نتیجه بگیرید:**

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۴}+\dots=\binom{n}{۱}+\binom{n}{۳}+\binom{n}{۵}+\dots=۲^{n-۱} \quad (۵)$$

اگر تعداد مسیرها از تقاطع (۱,۱) به تقاطع‌های دیگر را بنویسیم، شکل زیر حاصل می‌شود:



● **سؤال ۹. اتحاد (۳) در این شکل بیانگر چه ویژگی است؟ اتحاد (۱) چه‌طور؟ علی به روش جبری حدس دوم خود را ثابت می‌کند: (i+j=n)**

ضریب x^iy^j = $\binom{n}{i}=\dfrac{n!}{i!j!}$
$=\dfrac{n!}{j!(n-i)!}=\binom{n}{j}=x^jy^i$ ضریب

بنابراین: $\binom{n}{i}=\binom{n}{n-i}$ (۶).

اما پارسا که به راه‌حل‌های ترکیبیاتی بیشتر علاقه‌مند است، به کمک مسئله ۳، اثباتی ترکیبیاتی برای اتحاد (۶) پیدا می‌کند.

● **سؤال ۱۰. اثباتی ترکیبیاتی برای اتحاد (۶) پیدا کنید. آیا می‌توانید به کمک مسئلهٔ ۱ یا ۳، اثباتی ترکیبیاتی برای اتحاد (۱) پیدا کنید.**
اکنون که به پایان این مقاله نزدیک می‌شویم، مسئله‌ای برای شما مطرح می‌کنیم. بررسی کنید که چه روشی (جبری یا ترکیبیاتی) برای حل این مسئله مفیدتر است؟

◆ **مسئلهٔ ۴.** اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\binom{n}{۰}^۲+\binom{n}{۱}^۲+\dots+\binom{n}{n}^۲=\binom{۲n}{n}$$

مقاله را به پایان می‌بریم در حالی‌که علی (که به روش جبری علاقه‌مند است)، تساوی زیر را می‌نویسد و شروع به حل مسئله می‌کند:
$(x+y)^n(x+y)^n=(x+y)^{۲n}$.
و پارسا که به روش ترکیبیاتی علاقه دارد، به کدهای ۲n رقمی که شامل n رقم صفر و n رقم یک هستند، فکر می‌کند.
شما چه‌طور؟ بیایید با هم از تقاطع (۱,۱) به تقاطع (n+۱, n+۱) برویم!